

Gulbenkian Descobrir.



MUSEU
CALOUSTE GULBENKIAN

Arte e
matemática
Simetria

Arte e matemática

Simetria

Conceção: Cecília Costa, Raquel Feliciano, Simão Palmeirim
Revisão pedagógica: Susana Gomes da Silva, Andreia Dias
Revisão científica: Jessica Hallet, Professor Pedro Freitas
(Departamento de História e Filosofia das Ciências, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa)

Esta proposta inspira-se na experiência da visita «Descobrir a Matemática na Arte» e propõe a exploração de uma seleção de obras do Museu Calouste Gulbenkian a partir das suas relações com a matemática, de forma rica e criativa, através de exercícios práticos. Com o intuito de despertar o entusiasmo pela matemática por intermédio da arte e vice-versa, serão propostas algumas leituras e atividades menos habituais na sala de aula, mas que têm sido postas em prática e testadas recorrentemente pela equipa educativa nas visitas ao Museu.

Nível de escolaridade (recomendado)

1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Básico

Disciplinas

Matemática e Educação Visual

Público-alvo e temáticas curriculares

Professores do 1º ciclo: reflexão

Professores de Matemática e Educação Visual do 2º e 3º ciclos:
isometrias, reflexão, rotação e translação

Como começar

A matemática e a arte são formas de pensar e interpretar o mundo que nos envolvem e se traduzem em muito mais relações à nossa volta do que aquelas que habitualmente presenciamos. O objetivo destas propostas é incentivar um olhar questionador, atento e curioso, capaz de relacionar matemática e arte a partir de um conjunto de obras selecionadas e de pistas para a sua exploração. Esta proposta incide sobre o conceito de simetria presente nos vários ciclos do ensino básico. Ao longo dos exercícios e desafios, serão ainda evocados outros conceitos matemáticos que podem ser desenvolvidos a partir dos temas apresentados, nomeadamente números racionais e irracionais, número de ouro, geometria sagrada, duas e três dimensões.

São apresentadas oito obras do Museu Gulbenkian que serão o ponto de partida para duas tipologias de atividades exploratórias:

- a) **Observar**—ideias ou conteúdos matemáticos que podem ser explorados através de uma conversa.
- b) **Fazer**—desafios ou exercícios práticos que podem ser desenvolvidos na sala de aula.

O professor poderá selecionar as obras e/ou os temas e adaptar os desafios propostos ao contexto específico de cada ciclo, cada turma e cada aluno. Apresenta-se adicionalmente um conjunto de links úteis como complemento a este recurso.

O conceito de simetria

Simetria vem do grego *συμμετρικός* (*symmetrikós*) que significa «em harmonia com». Em matemática, uma simetria de um objeto é uma transformação do plano, ou do espaço, que não altera esse objeto. A simetria mais conhecida é a de reflexão, no entanto o termo abrange também a rotação, a translação ou a reflexão deslizante.

Para explorar a noção de simetria de reflexão

José Escada (1934-1980)



Sem Título, 1965
Tinta-da-china, aguarela e guache sobre papel
Coleção Moderna, Inv. DP1066



Sem Título (Relevo Espacial), 1974
Chapa de ferro recortada
Coleção Moderna, Inv. 95P347

Estas obras de José Escada jogam com simetrias de reflexão, tema recorrente na sua obra. Tanto na pintura, como é o caso da primeira peça—*Sem Título*, 1965 —, como no relevo espacial feito por recorte de folhas de metal, que se observa na segunda obra—*Sem Título (Relevo Espacial)*, 1974 —, há um jogo de contrastes positivo/negativo e forma/fundo. A segunda obra, pelo seu caráter escultórico, salienta ainda mais as sombras provocadas pelos côncavos e convexos resultantes das dobragens e dos recortes em metal, resultando numa peça rica que convida a uma leitura mais atenta.

Observar

Mapa de perguntas

O que vemos aqui? Que formas identificamos? Figuras? Partes de corpos? Como distinguir figuração de abstração?

Este é um dos temas mais importantes para José Escada, que explorou intensamente a fronteira entre figurativo e abstrato. Mesmo em formas abstratas, temos tendência a ler signos, figuras, animais... Sobretudo se forem simétricas. Porque será?

Podemos procurar simetrias perfeitas e pequenas assimetrias nestas composições?

Identificamos facilmente o assimétrico por oposição ao simétrico? Pode haver elementos simétricos dentro de uma obra assimétrica?

CURIOSIDADE

Estas formas evocam animais, algas ou plantas. A simetria de reflexão, ou seja, a bilateralidade, é uma lei presente no mundo animal, vegetal e mineral. Na natureza existem outras leis matemáticas como a simetria radial, espirais, fractais, a sucessão de Fibonacci ou até a proporção áurea (número Φ).

Fazer

1. Manchas simétricas

Nível de escolaridade recomendado:
1º e 2º ciclos

Sobre uma folha de papel branco, criar manchas com uma ou várias cores, pintando com as mãos ou aplicando tintas com um pincel. Em seguida, sem deixar a tinta secar, dobrar o papel a meio pelo lado com tinta. Ao abrir serão criadas manchas simétricas! Expor todos os desenhos e conversar sobre o que evocam as formas e onde reside a sua simetria.



CURIOSIDADE

Este exercício está associado a um famoso teste de psicologia, o teste de Rorschach.



2. Formas recortadas

Nível de escolaridade recomendado:
2º ciclo

Utilizando uma folha de cartolina ou cartão dobrar a folha ao meio e recortar uma forma que comece e acabe na dobra do papel (desenhando previamente, ou não). Voltar a abrir o papel e inverter, encaixando a forma recortada no fundo. Reunir os vários resultados e construir uma colagem em 3D inspirada na colagem de José Escada, que poderá ser ponto de partida para explorar a sua relação com o tema.

3. Simetrias imperfeitas

Nível de escolaridade recomendado:
2º e 3º ciclos

Dobrar uma folha de papel ao meio; no lado direito, desenhar uma linha livremente. Procurar, num segundo momento, espelhá-la manualmente no lado esquerdo, usando a dobra que divide o papel como eixo de simetria. O resultado será uma simetria “imperfeita”, porque manual, como aquela que observamos em várias obras de José Escada.



Para explorar a simetria espacial (eixo e plano de simetria)

Antony Gormley (1950)



Close II, 1993

Ar, chumbo, fibra de vidro e gesso

Coleção Moderna, Inv. 95EE46

A obra de Antony Gormley aqui apresentada representa um corpo humano à escala real, deitado de barriga para baixo. A obra do autor inclui várias esculturas de tamanho natural, feitas a partir do molde do seu próprio corpo, em posições diversas de fechamento e abertura e em diferentes materiais. Esta obra em chumbo, que cita o famoso «Homem de Vitruvius» de Leonardo da Vinci, acentua a aparente simetria do corpo humano através de linhas de soldadura.

O título sugere-nos o duplo sentido de *close* — «fechado» e «perto» —, e a leitura detalhada dos materiais de que é feita a obra (ar, chumbo, fibra de vidro e gesso) oferece-nos outras pistas interessantes para reflexão e exploração.

Observar

Mapa de perguntas

- O que vemos aqui?
- Como podemos descrever esta obra?
- De que materiais é feita?
- Como terá sido feita?
- De que nos fala?
- O que nos faz pensar?
- Com o que a conseguimos relacionar?
- Que elementos nos permitem fazer essa relação?
- Porque terá sido escolhida para falarmos de simetria? De que simetria estamos a falar?
- Qual é a diferença entre um eixo e um plano de simetria?

CURIOSIDADE

Antony Gormley listou o ar como um dos materiais utilizados na construção desta escultura. Será oca? Tem ar lá dentro? O espaço oco foi anteriormente ocupado pelo corpo do artista, a partir do qual a escultura foi moldada, e está hermeticamente fechado desde 1993!

Fazer

1. Eixo de simetria e o corpo humano

Nível de escolaridade recomendado: 1º e 2º ciclos

Desenhar o contorno da figura humana na posição desta escultura, traçando o seu eixo de simetria. Procurar outros elementos cujo contorno seja simétrico, como vegetais (ex.: folha do plátano), animais (ex.: estrela-do-mar) ou objetos (ex.: tesoura). A partir desta exploração pode iniciar-se um debate em torno do eixo e plano de simetria. O corpo humano é tridimensional. E, porque tem volume, é um plano de simetria que o divide ao meio e não um eixo. Será que cada parte do corpo pode também ela ser dividida em duas metades iguais?

SUGESTÃO

Esta figura é simétrica por fora e por dentro... Mas o corpo humano não é simétrico por dentro—esta ideia pode ser desenvolvida em Ciências da Natureza, explorando a simetria ou assimetria dos órgãos.

2. Alfabeto simétrico

Nível de escolaridade recomendado: 2º e 3º ciclos

Percorrer o alfabeto e ver que letras têm eixos de simetria horizontal, vertical, ou ambos. Escrever palavras que tenham:

– um eixo de simetria horizontal:

~~ECO~~ ~~OCO~~
~~DOIDO~~ ~~DOCE~~

– ou vertical:

T U M
U V O
A A T

SUGESTÃO

Num cruzamento entre Matemática, Língua Portuguesa e Educação Visual, podem desafiar-se os alunos a criar pequenas composições de poesia visual, recorrendo apenas a palavras simétricas com o mesmo eixo de simetria, e brincando na página com o(s) eixo(s)!

Para explorar a noção de simetria imperfeita

José de Almada Negreiros (1893-1970)



Retrato de Fernando Pessoa, 1964
Encomenda da Fundação Calouste Gulbenkian
Coleção Moderna, Inv. 64P66



Retrato de Fernando Pessoa, 1954
Encomenda do proprietário do restaurante Irmãos Unidos
Museu de Lisboa / Casa Fernando Pessoa / EGEAC
Inv. MC.PIN.0410

Almada Negreiros é um dos incontornáveis modernistas portugueses, como o é Fernando Pessoa, aqui retratado. Almada, além de pintor, também escreveu poesia, manifestos e peças de teatro. É um artista plural que ao longo de toda a sua obra plástica desenvolveu uma progressiva abstração das formas, dando particular importância à geometria. Nestas duas pinturas simétricas, realizadas com dez anos de diferença, a importância do quadrado é notória. As duas versões parecem feitas em espelho, numa complementaridade bilateral esquerda-direita.

Observar

Mapa de perguntas

- que estamos a ver?
- Que elementos podemos identificar nestas obras?
- Como descrevê-las?
- Que semelhanças e que diferenças encontramos em ambas as composições?
- Estas obras serão exatamente simétricas?
- Com que mão escreveria Fernando Pessoa?
- Seria ambidestro? Qual destes dois será o «verdadeiro» Pessoa? ○ o canhoto ou o destro?

CURIOSIDADE

○ O nosso cérebro é simétrico, mas as funções dos dois hemisférios são diferentes, o que contribui para as nossas ligeiras assimetrias esquerda/direita, tanto na forma do corpo como nas funções. Esquerda e direita são, no corpo humano, quase simétricas mas diferentes: opostas e complementares.

Fazer

1. Descubra as diferenças

Nível de escolaridade recomendado: 1º e 2º ciclos

Vamos encontrar semelhanças e diferenças nestas duas pinturas de Almada Negreiros. Identificar o que está simétrico e o que não está (por exemplo, o número 2 na capa do livro), listando ou desenhando, livremente ou com a ajuda de papel vegetal, todos os elementos identificados (por exemplo, numa coluna listar as semelhanças, noutra as diferenças; ou numa coluna registar o que é simétrico, noutra o assimétrico).

2. Mão dominante, mão de apoio

Nível de escolaridade recomendado: 2º e 3º ciclos

No nosso corpo, uma mão tem movimentos mais precisos e minuciosos, enquanto a outra quase só lhe serve de apoio.

Desafio corporal: imobilizar a mão com que não escrevemos atrás das costas e tentar desenhar ou escrever usando só a mão dominante. Sentimos falta da mão de apoio? Repetir com a outra mão.

3. Duas mãos—Desenho simultâneo

Nível de escolaridade recomendado: 1º, 2º e 3º ciclos

Com a folha presa, escrever o nome simultaneamente com a mão direita e com a esquerda, em espelho. Experimentar o mesmo com desenhos mais complexos, ou até com frases inteiras.

4. Assimetrias subtis

Nível de escolaridade recomendado: 1º, 2º e 3º ciclos

A assimetria do corpo humano é subtil. As linhas das mãos esquerda e direita são parecidas (em espelho), mas há pequenas diferenças.

Vamos comparar e descobrir as diferenças!

Fotografar ambas as palmas das mãos, imprimir e desenhar sobre as linhas com papel vegetal, e, em seguida, comparar as diferenças.

5. Quem sou eu?

Nível de escolaridade recomendado: 2º e 3º ciclos

Rostos simétricos/assimétricos: vamos encostar um espelho ao nariz dividindo o rosto ao meio (eixo de simetria). Com o espelho virado para o lado direito, fechar o olho esquerdo e ver o rosto feito de duas metades direitas. Fazer de seguida o mesmo com a metade esquerda. O reconhecimento é difícil, porque, na verdade, o nosso rosto não é completamente simétrico.

Para trabalhar os conceitos de rotação, translação e reflexão

Artefactos de diferentes civilizações

As duas peças seguintes pertencem à Coleção de Calouste Sarkis Gulbenkian e são oriundas de duas civilizações cuja diversidade cultural atravessa o tempo e o espaço: uma faiança da Anatólia do século XVIII e um baixo-relevo de calcário retirado de um túmulo da IV dinastia do antigo Egito. A sua seleção prende-se com o facto de invocarem imaginários estéticos e civilizacionais diferentes mas que, ainda assim, nos remetem para as noções de isometria e de ritmo, permitindo exercícios plásticos simples para a compreensão das noções de ritmo, rotação, translação e reflexão.



Turquia Oriental, Cutaia, século XVIII
Faiança pintada sob o vidro
Coleção do Fundador, Inv. 927

Nos finais do século XIV, os arménios estabeleceram uma comunidade urbana em Cutaia, situada na Anatólia, a cerca de duzentos quilómetros de Istambul. As cerâmicas de Cutaia apresentam uma paleta cromática variada em que predominam os amarelos e verdes. Embora na técnica e decoração se inspirem na célebre cerâmica otomana de Iznik, a sua originalidade reside, por um lado, na utilização da tonalidade amarela e, por outro, na produção abundante de peças com motivos da iconografia cristã. No fundo desta taça, estão representados peixes, símbolo do cristianismo primitivo, dispostos em círculo em redor de uma rosácea em forma de estrela.

Observar

Mapa de perguntas

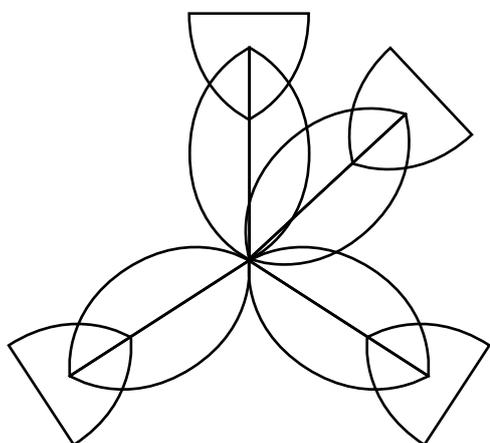
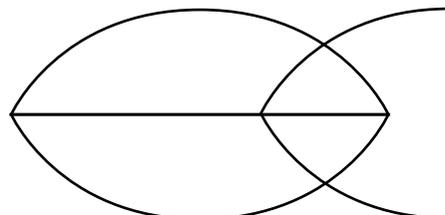
- O que estamos a ver?
- Que elementos/símbolos identificamos nesta peça?
- Para que serviria?
- Existem outros objetos do mesmo tipo?
- Com o mesmo tipo de decoração?
- Como está decorada?
- Há elementos que se repetem?
- Há elementos únicos?

Fazer

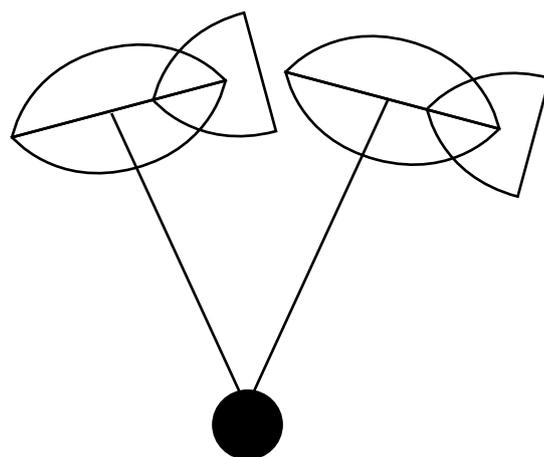
Peixes em movimento

Nível de escolaridade recomendado:
1º e 2º ciclos

Utilizando uma cartolina, construir um peixe como os que estão representados na taça e recortar. Este molde irá servir para realizar várias composições por rotação.



Escolher um ponto do peixe e fixá-lo a um papel com um piónés. Rodar o peixe em vários ângulos, desenhando as formas resultantes em cada passo. Pode-se experimentar prender a «boca» do peixe ou a cauda.



Em seguida, prender uma ponta de um fio ao ponto do peixe escolhido, e prender a outra ponta do fio a um pedaço de cartão. Repetir o processo de rodar e desenhando.

Qual terá sido o ponto usado para rodar o peixe como na taça?

Para explorar a ideia de translação



Egito, Império Antigo, IV dinastia (c. 2500 a. C.)
Calcário policromo
Coleção do Fundador, Inv. 159

Este fragmento de baixo-relevo em calcário foi retirado do túmulo da princesa Meritités e do seu marido, Akhtihotep, em Guiza. Nele observamos duas figuras femininas. Verificam-se algumas regras convencionais da representação: o tronco é visto de frente e simultaneamente de perfil, a cabeça está de perfil enquanto o olho é visto de frente. Sobre o bloco de calcário veem-se ainda restos de cor verde, a única que subsistiu da variedade cromática que a peça tinha, uma vez que todos os relevos eram, em geral, pintados.

Observar

Mapa de perguntas

O que estamos a ver?

Que elementos/símbolos identificas nesta obra?

Como a descreverias? Para que serviria?

Conheces outros objetos do mesmo tipo?

Como estão representadas as figuras humanas?

Há elementos que se repetem?

Fazer

Duplos

Nível de escolaridade recomendado:
2º e 3º ciclos

Com a imagem reproduzida em tamanho grande, identificar as figuras representadas e procurar as que se repetem (hieróglifo de pintainho, figura humana). Usando papel vegetal ou acetato, contorná-las e operar a translação de acordo com o vetor horizontal num dos casos, e de acordo com o vetor vertical no outro.



CURIOSIDADE

A noção de «duplo» e o seu simbolismo religioso no antigo Egito pode ser evocada a propósito deste relevo funerário. Este conceito tem relação com a simetria! O duplo, também chamado «KA», que aliás sobrevivia à morte física, era «invertido», evoluindo num mundo invisível onde tudo estava ao contrário do mundo físico... Aqui não podemos falar em translação nem numa simples simetria ótica.

Para trabalhar o conceito de plano de simetria

Cecília Costa (1971)



Sem Título (da série *Pli*), 2005
Prova lambda; 60 × 75 cm
Inv. 16FP586

O trabalho de Cecília Costa explora as relações entre arte e matemática, nomeadamente com várias séries de trabalhos dedicados à simetria. A série *Pli*, que inclui diversas obras de escultura, fotografia, desenho e vídeo, brinca com variações em torno dos temas da simetria, dobra e sobreposição. «*Pli*» significa «dobra», que pode ser interpretado como charneira ou sobreposição. A estranheza desta imagem advém de, numa primeira impressão, parecer uma imagem ao espelho, quando, na verdade, foi criada pela sobreposição de duas fotografias, uma tirada de frente e outra de costas.

Observar

Mapa de perguntas

Nesta fotografia, serão duas gémeas ou a mesma pessoa?

Porque não estão as duas figuras simétricas?

Não podemos falar de simetria de reflexão...

Em que pormenores o vemos?

Que operação terá feito aqui a artista?

Como o terá feito?

Que diferenças fundamentais existem entre uma pessoa e o seu reflexo?

Será que a imagem continua a viver no espelho depois de nos afastarmos?

Terão os espelhos memória?

Será que o mundo/espaco do reflexo continua infinitamente para lá do que vemos?

Fazer

Jogo do espelho—Exercícios dois a dois

Nível de escolaridade recomendado: 1º e 2º ciclos

Dois a dois, os alunos vão simular a existência de um espelho, plano imaginário de reflexão. Um dos alunos irá mover-se e dizer uma frase simples, o outro irá mimetizar os movimentos como um espelho e repetir a frase como um eco.

Num segundo momento, o primeiro aluno continuará a movimentar-se e a enunciar palavras ou frases mas o segundo, em vez de mimetizar irá fazer o contrário.

Se o primeiro usa a mão direita, o segundo usará a mão esquerda; se o primeiro diz «agora para cima», o segundo dirá «cima para agora» (ou «agora para baixo»). No final, em silêncio, poderá ser criada uma coreografia espontânea, em que não está definido, à partida, quem deverá iniciar os movimentos. Os alunos devem procurar espelhar os movimentos um do outro em simultâneo, de forma complementar, pelo que a atenção deve ser total, para serem o espelho fiel um do outro.

SUGESTÃO

Esta atividade permite o cruzamento das disciplinas de Educação Visual e Expressão Dramática.

Para trabalhar os conceitos de simetria imperfeita e tira de Moebius

René Lalique (1860-1945)



Espelho Serpentes
França, c. 1899-1900
Moldura em bronze
Coleção do Fundador, Inv. 1263

Calouste Gulbenkian encomendou este espelho a René Lalique para o quarto do seu palácio em Paris. Lalique era um joalheiro inovador que, no final do século XIX e início do século XX, transformou a joalheria em arte, utilizando materiais diversos como pedras preciosas e semipreciosas, osso, esmalte, vidro, marfim, aliados aos tradicionais metais nobres. As suas peças destacam-se pela criatividade das formas e cores, inspiradas numa observação da natureza, na arte japonesa e na mitologia antiga. Este fascinante objeto escultórico é quase simétrico, como tantas outras peças de Lalique.

Observar

Mapa de perguntas

Como descrever este objeto?

Para que serve?

Que elementos identificamos na sua composição?

Poderíamos dizer que é simétrico?

Há simetria entre o mundo real e o seu reflexo no espelho?

E as serpentes estão simétricas?

Onde passa o seu plano de simetria?

Há um detalhe assimétrico...



As caudas das serpentes que suportam o espelho estão entrelaçadas!

Fazer

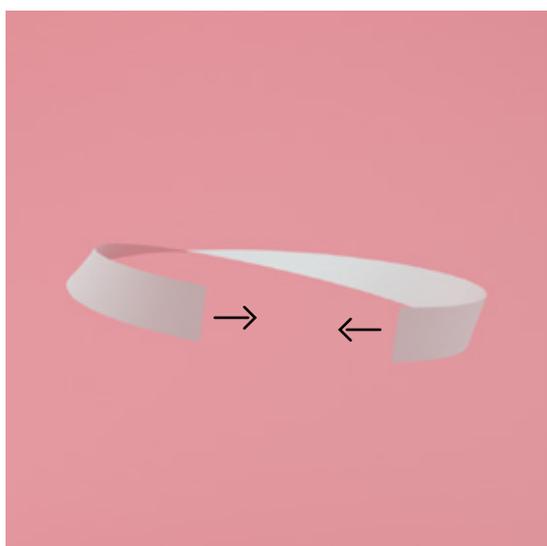
Na zona inferior do objeto, o entrelaçar ondulado das caudas das serpentes evoca um objeto matemático fascinante e as experiências que resultam do seu corte: a tira ou fita de Moebius.

1. Tira de Moebius I

Nível de escolaridade recomendado: 2º e 3º ciclos

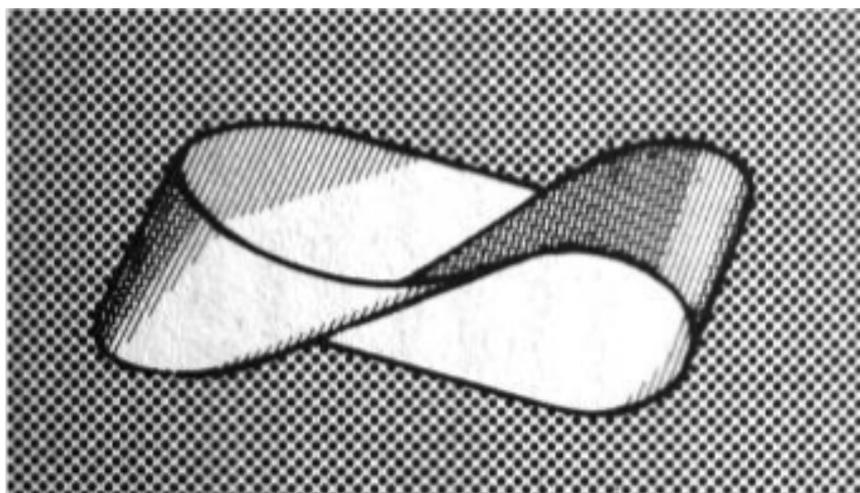
Vamos construir uma tira de Moebius e explorar as noções de face do papel e de continuidade dentro/fora.

Para construir uma tira de Moebius, é necessário recortar uma tira a partir de uma folha de papel A4 ou A5 e unir as pontas após operar uma torção

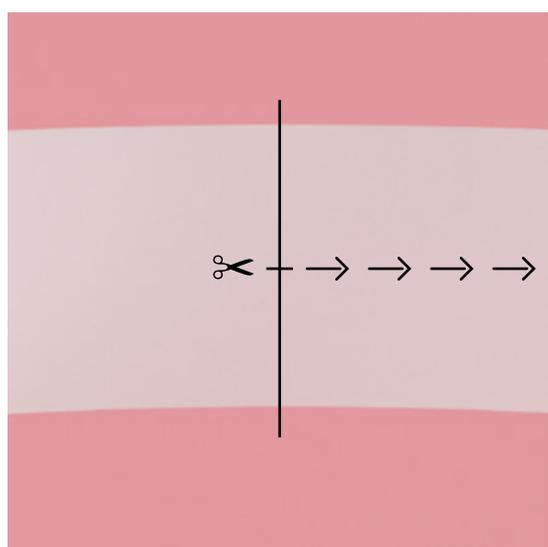


A tira de Moebius é uma fita que não tem frente e verso, mas uma face única. Percebemos isto percorrendo-a com uma caneta, traçando, por exemplo, o percurso hipotético de um ser minúsculo ao longo da sua superfície. Passamos sem descontinuidade do interior para o exterior, num caminho sem fim...

Curiosamente, o símbolo do infinito é muito parecido com este objeto matemático.



Recortar agora a tira de Moebius a meio, como indicado na imagem. Brincar com o objeto final e as suas diversas posições possíveis.

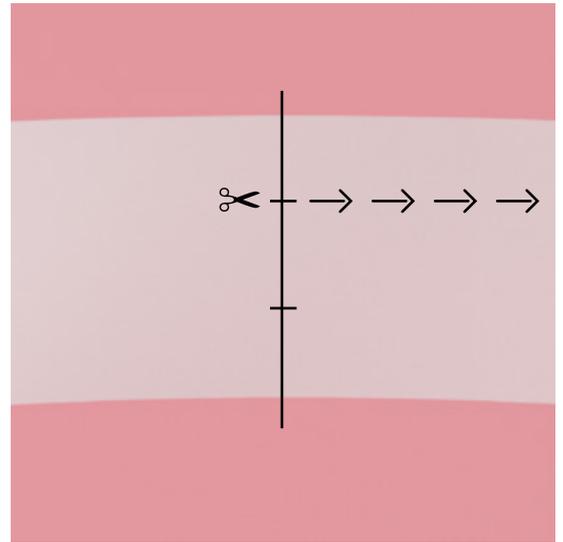


Que propriedades tem este novo objeto? Quantas faces?

2. Tira de Moebius II

Nível de escolaridade recomendado: 2º e 3º ciclos

Construir outra tira de Moebius, que iremos cortar não ao meio, mas a um terço da sua largura. Esta operação vai dar origem a um novo objeto, composto por duas tiras entrelaçadas, uma pequena e uma grande. Experimentar mover a tira pequena ao longo da maior.



Para verificar o número de faces das fitas, experimentar percorrê-las com canetas de várias cores.

Que qualidades matemáticas têm as fitas que resultam deste corte?

Porque ficam entrelaçadas apesar de podermos mover a tira pequena ao longo da maior?

Algumas questões para desenvolver

A simetria é um conceito da matemática que está presente na arte, mas também na natureza.

Será a simetria apenas visual?

Se, na origem, a palavra significa «em harmonia com», será a simetria uma materialização da harmonia?

O que é a harmonia? Como se expressa? Na matemática está eminentemente ligada à noção de proporção. E na música?

Porque associamos tantas vezes a ideia de harmonia à de equilíbrio, ou mesmo de perfeição?

A harmonia que vemos, ouvimos ou sentimos—na arte ou na natureza—está nos próprios objetos ou na nossa percepção deles?

Saber mais

Para saber mais—Bibliografia e links úteis

Para explorar

A noção de simetria de reflexão

- <https://gulbenkian.pt/noticias/eu-nao-evoluo-viajo/>
- https://www.ted.com/talks/damion_searls_how_does_the_rorschach_inkblot_test_work/transcript?language=pt#t-286625
- http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_biology
- [https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Symmetry_\(biology\)](https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Symmetry_(biology))

A simetria espacial (eixo e plano de simetria)

- https://www.ted.com/talks/leo_q_wan_why_are_human_bodies_asymmetrical
- <https://www.antonygormley.com>
- <https://www.atractor.pt/ujr/simetria.pdf>

A noção de simetria imperfeita

- <https://www.sistemasolar.pt/pt/produto/277/pt/jose-de-almada-negreiros-uma-maneira-de-ser-moderno/>
 - <https://arquivos.rtp.pt/conteudos/leilao-no-restaurante-irmaos-unidos/>
 - <https://gulbenkian.pt/almada-comecar/>
 - https://www.ted.com/talks/colm_kelleher_the_science_of_symmetry/transcript
- Alguns exercícios:
- <https://www.greatschools.org/library/cms/33/24833.pdf>
 - <https://www.greatschools.org/library/cms/95/24395.pdf>
 - <https://www.amazon.com/Drawing-Right-Side-Brain-Definitive/dp/1585429201>

Para trabalhar os conceitos

De rotação, translação e reflexão

- <https://www.ck12.org/book/ck-12-algebra-i-concepts-honors/section/10.9/>
- <https://www.mathsisfun.com/geometry/symmetry-artist.html>

De simetria imperfeita e tira de Moebius

- https://www.youtube.com/watch?v=XlQOipIVFPk&ab_channel=ThinkTwicehttps://www.escherinhetais.nl/story-of-escher/perpetuum-mobile/?lang=en
- https://www.youtube.com/watch?v=aZZ_d-FF0Bc

Artistas que exploram a tira de Moebius:

- Lygia Clark: <http://www.artefazparte.com/2012/09/sempre-em-frente.html>
<https://www.moma.org/audio/playlist/181/2392>
- Max Bill: <https://www.middelheimmuseum.be/en/page/max-bill-switzerland>
- John Ernest: <https://www.tate.org.uk/art/artworks/ernest-moebius-strip-t11762>
- Jorge Pinheiro: https://issuu.com/sistemasolar/docs/jorge_pinheiro (pp. 58-59)